



12 作用於齒輪上的力

齒輪組在傳達動力時，齒輪上產生作用力。在圖 12.1 所示的正交座標系中，如果設 Z 軸為齒輪軸的話，X 軸方向的作用力為切線力（圓周方向） F_t (N)、Y 軸方向的作用力為徑向力（半徑方向） F_r (N)、Z 軸方向的作用力為軸向力 F_x (N) 或稱為推力 (N)。這些作用力對決定齒輪的形狀、軸、軸承的尺寸是非常重要的。

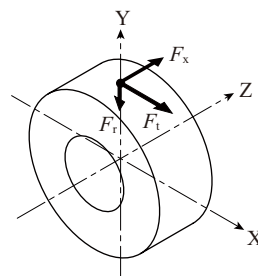


圖 12.1 輪齒的受力示意圖

表 12.1 中為各種齒輪齒的作用力 (N) 計算關係式。力矩 T 及 T_1 的單位是 $N \cdot m$ 。

表 12.1 齒輪的作用力計算關係式一覽表

齒輪的種類		F_t : 切線方向力	F_x : 軸方向力	F_r : 半徑方向力	
正齒輪		$F_t = \frac{2000T}{d}$	—	$F_t \tan \alpha$	
螺旋齒輪			$F_t \tan \beta$	$F_t \frac{\tan \alpha_n}{\cos \beta}$	
直齒傘形齒輪		$F_t = \frac{2000T}{d_m}$ 其中 d_m 是中央分度圓直徑 $d_m = d - b \sin \delta$	$F_t \tan \alpha \sin \delta$	$F_t \tan \alpha \cos \delta$	
彎齒傘形齒輪			凸齒面為工作面時:	$\frac{F_t}{\cos \beta_m} (\tan \alpha_n \sin \delta - \sin \beta_m \cos \delta)$	$\frac{F_t}{\cos \beta_m} (\tan \alpha_n \cos \delta + \sin \beta_m \sin \delta)$
			凹齒面為工作面時:	$\frac{F_t}{\cos \beta_m} (\tan \alpha_n \sin \delta + \sin \beta_m \cos \delta)$	$\frac{F_t}{\cos \beta_m} (\tan \alpha_n \cos \delta - \sin \beta_m \sin \delta)$
			—	—	—
蝸輪組	蝸桿主動	$F_{t1} = \frac{2000T_1}{d_1}$	$F_{t1} \frac{\cos \alpha_n \cos \gamma - \mu \sin \gamma}{\cos \alpha_n \sin \gamma + \mu \cos \gamma}$	$F_{t1} \frac{\sin \alpha_n}{\cos \alpha_n \sin \gamma + \mu \cos \gamma}$	
	蝸輪被動	$F_{t2} = F_{t1} \frac{\cos \alpha_n \cos \gamma - \mu \sin \gamma}{\cos \alpha_n \sin \gamma + \mu \cos \gamma}$	F_{t1}		
交錯軸螺旋齒輪 ($\Sigma = 90^\circ$ $\beta = 45^\circ$)	主動齒輪	$F_{t1} = \frac{2000T_1}{d_1}$	$F_{t1} \frac{\cos \alpha_n \sin \beta - \mu \cos \beta}{\cos \alpha_n \cos \beta + \mu \sin \beta}$	$F_{t1} \frac{\sin \alpha_n}{\cos \alpha_n \cos \beta + \mu \sin \beta}$	
	被動齒輪	$F_{t2} = F_{t1} \frac{\cos \alpha_n \sin \beta - \mu \cos \beta}{\cos \alpha_n \cos \beta + \mu \sin \beta}$	F_{t1}		

12.1 平行軸齒輪

圖 12.2 是作用在螺旋齒輪上的力之示意圖。

螺旋角越大，推力（軸向力）也越大。在正齒輪的情況下，不產生軸向力。

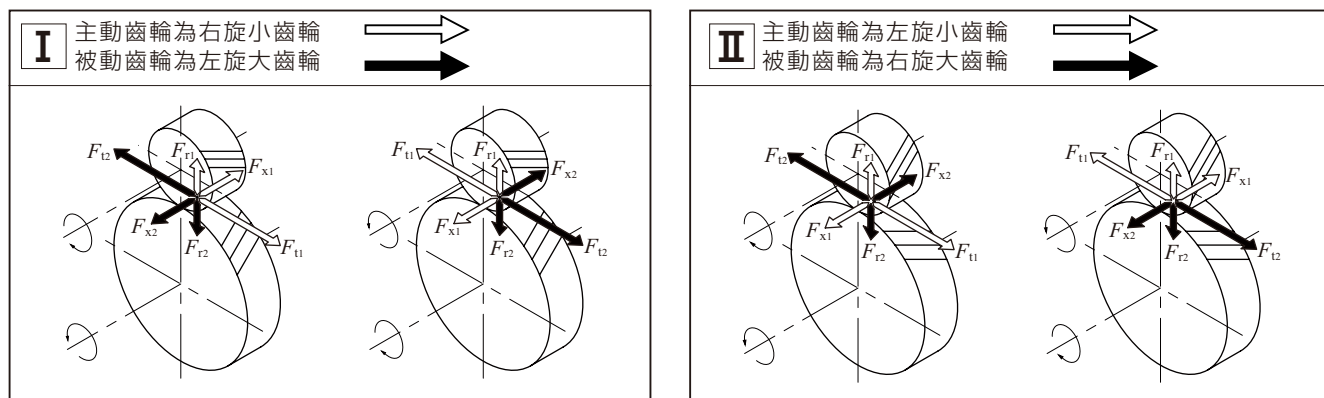


圖 12.2 在螺旋齒輪齒上的各分力方向



表 12.2 計算例 (正齒輪)

No	規 格	記號	單位	計算公式	正齒輪	
					小齒輪	大齒輪
1	模數	m	mm	設定值	2	
2	齒直角壓力角	α_n	度		20°	
3	齒數	z	—		20	40
4	螺旋角	β	度		0	
5	輸入力矩	T_1	N·m	2	—	
6	節圓直徑	d	mm	zm	40	80
7	切線方向力	F_t	N	$\frac{2000T}{d}$	100.0	
8	軸方向力	F_x		—	0	
9	半徑方向力	F_r		$F_t \tan \alpha$	36.4	
10	輸出力矩	T_2	N·m	$\frac{F_t d_2}{2000}$	—	4

12.2 相交軸齒輪

軸角 $\Sigma = 90^\circ$ 的直齒傘形齒輪咬合時，作用於主動齒輪上的軸向力 F_{x1} 和作用於被動齒輪的上徑向力 F_{r2} 大小相同。作用於主動齒輪上的軸向力 F_{r1} 和被動齒輪上的軸向力 F_{x2} 也是大小相同。

$$\left. \begin{aligned} F_{x1} &= F_{r2} \\ F_{r1} &= F_{x2} \end{aligned} \right\} \quad (12.1)$$

(1) 直齒傘形齒輪

直齒錐齒輪的輪齒受力如圖 12.3 所示。

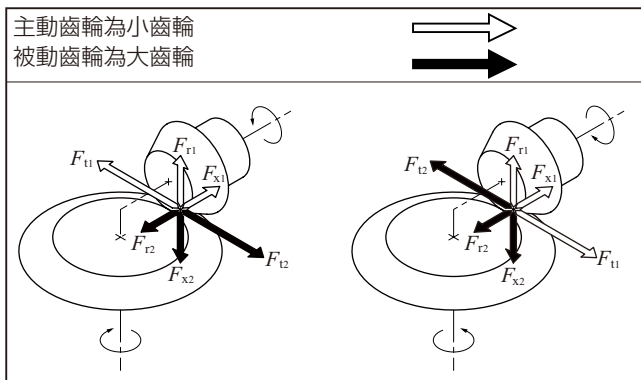


圖 12.3 直齒傘形齒輪齒上的各分力方向

(2) 彎齒傘形齒輪

彎齒傘形齒輪有凸齒面及凹齒面之分，依力所驅動齒面的不同，齒所受的各分力也不同。齒輪的螺旋方向、回轉方向及咬合齒面之間的關係如表 12.5 所示。彎齒傘形齒輪的齒受力如圖 12.5 所示。彎齒傘形齒輪的軸向力 F_x 會出現負值，負值表示齒輪上會有讓兩齒面相互朝兩軸交點方向擠進的力 (趨勢) 發生，如果再加上此時軸向上的軸承有間隙的話，將會使得齒輪如不可避免地朝兩軸交點擠進，甚至有無齒隙狀態發生的可能。兩齒面間無間隙的擠壓咬合，會對齒輪造成不良影響，所以，需要特別注意軸向上軸承的間隙。

表 12.3 計算例 (螺旋齒輪)

No	規 格	記號	單位	計算公式	正齒輪	
					小齒輪	大齒輪
1	正面模數	m_t	mm	設定值	2	
2	正面壓力角	α_t	度		20°	
3	齒數	z	—		20	40
4	螺旋角	β	度		21.5°	
5	輸入力矩	T_1	N·m	2	—	
6	齒直角壓力角	α_n	度	$\tan^{-1}(\tan \alpha_t \cos \beta)$	18.70838°	
7	節圓直徑	d	mm	zm_t	40	80
8	切線方向力	F_t	N	$\frac{2000T}{d}$	100.0	
9	軸方向力	F_x		$F_t \tan \beta$	39.4	
10	半徑方向力	F_r		$F_t \frac{\tan \alpha_n}{\cos \beta}$	36.4	
11	輸出力矩	T_2	N·m	$\frac{F_t d_2}{2000}$	—	4

表 12.4 計算例 (直齒傘形齒輪)

No	規 格	記號	單位	計算公式	直齒傘形齒輪	
					小齒輪	大齒輪
1	軸角	Σ	度	設定值	90°	
2	模數	m_t	mm		2	
3	壓力角	α	度		20°	
4	齒數	z	—		20	40
5	螺旋角	β	度		0°	
6	齒幅	b	mm		15	
7	輸入力矩	T_1	N·m	1.6646	—	
8	節圓直徑	d	mm	zm	40	80
9	節錐角	$\delta_1 \cdot \delta_2$	度	$\tan^{-1}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \Sigma - \delta_1$	26.56505	63.43495
10	中央節圓直徑	d_m	mm	$d - b \sin \delta$	33.292	66.584
11	切線方向力	F_t	N	$\frac{2000T}{d_m}$	100.0	
12	軸方向力	F_x		$F_t \tan \alpha \sin \delta$	16.3	32.6
13	半徑方向力	F_r		$F_t \tan \alpha \cos \delta$	32.6	16.3
14	輸出力矩	T_2	N·m	$\frac{F_t d_{m2}}{2000}$	—	3.329

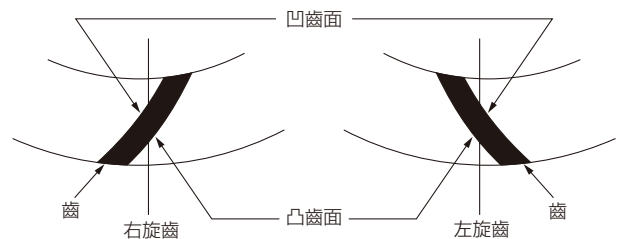


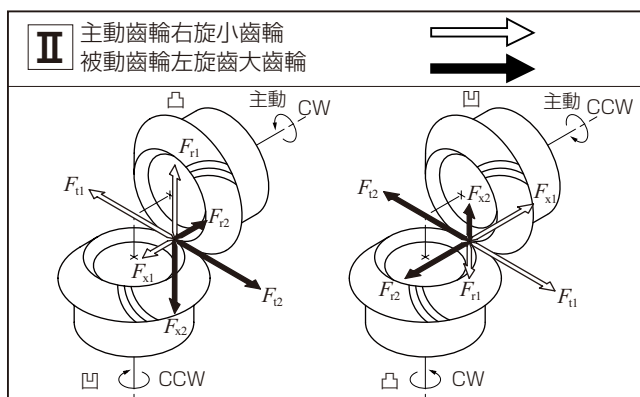
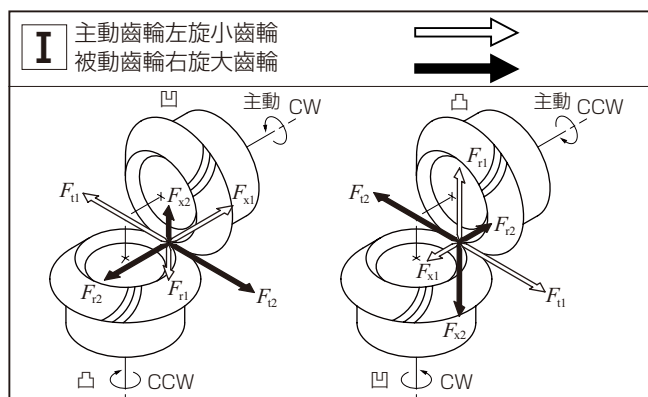
圖 12.4 彎齒傘形齒輪的凸齒面和凹齒面

表 12.5 咬合齒面一覽表

主動齒輪			被動齒輪		
螺旋方向	旋轉方向	咬合齒面	咬合齒面	旋轉方向	螺旋方向
L	CW	凹	凸	CCW	R
	CCW	凸	凹	CW	
R	CW	凸	凹	CCW	L
	CCW	凹	凸	CW	



$\Sigma = 90^\circ, \alpha_n = 20^\circ, \beta_m = 35^\circ, z_2/z_1 < 1.57357$



$\Sigma = 90^\circ, \alpha_n = 20^\circ, \beta_m = 35^\circ, z_2/z_1 \geq 1.57357$

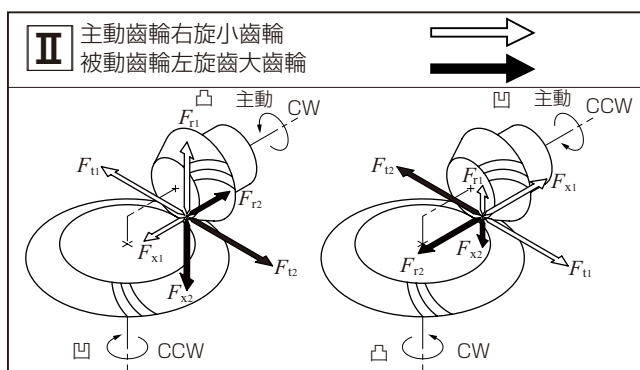
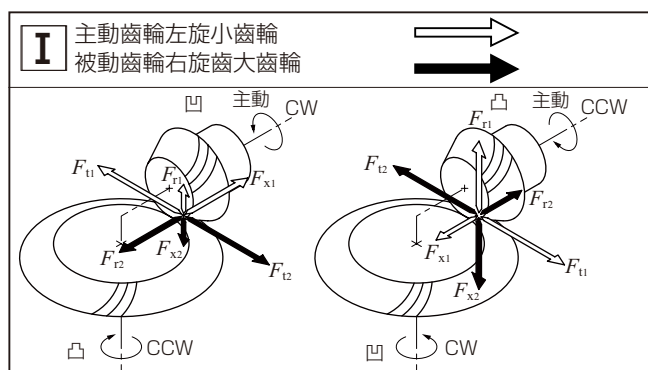


圖 12.5 彎齒傘形齒輪齒的各分力方向

表 12.6 計算例 (彎齒傘形齒輪)

No	規格	記號	單位	計算公式		彎齒傘形齒輪	
						小齒輪	大齒輪
1	軸角	Σ	度	設定值		90°	
2	正面模數	m_t	mm			2	
3	齒直角壓力角	α_n	度			20°	
4	齒數	z	—			20	40
5	螺旋角	β	度			35°	
6	齒幅	b	mm			15	
7	輸入力矩	T_1	N·m			1.6646	—
8	節圓直徑	d	mm	zm		40	80
9	節錐角	$\delta_1 \cdot \delta_2$	度	$\tan^{-1}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$	$\Sigma - \delta_1$	26.56505	63.43495
10	中央節圓直徑	d_m	mm	$d - b \sin \delta$		33.292	66.584
11	切線方向力	F_t	N	$\frac{2000T}{d_m}$		100.0	
						咬合齒面	
12	軸方向力	F_x	N	$\frac{F_t}{\cos \beta_m} (\tan \alpha_n \sin \delta - \sin \beta_m \cos \delta)$	$\frac{F_t}{\cos \beta_m} (\tan \alpha_n \sin \delta + \sin \beta_m \cos \delta)$	-42.8	71.1
13	半徑方向力	F_r		$\frac{F_t}{\cos \beta_m} (\tan \alpha_n \cos \delta + \sin \beta_m \sin \delta)$	$\frac{F_t}{\cos \beta_m} (\tan \alpha_n \cos \delta - \sin \beta_m \sin \delta)$	71.1	-42.8
						咬合齒面	
14	軸方向力	F_x	N	$\frac{F_t}{\cos \beta_m} (\tan \alpha_n \sin \delta + \sin \beta_m \cos \delta)$	$\frac{F_t}{\cos \beta_m} (\tan \alpha_n \sin \delta - \sin \beta_m \cos \delta)$	82.5	8.4
15	半徑方向力	F_r		$\frac{F_t}{\cos \beta_m} (\tan \alpha_n \cos \delta - \sin \beta_m \sin \delta)$	$\frac{F_t}{\cos \beta_m} (\tan \alpha_n \cos \delta + \sin \beta_m \sin \delta)$	8.4	82.5
16	輸出力矩	T_2	N·m	—	$\frac{F_t d_{m2}}{2000}$	—	3.329



12.3 交錯軸齒輪

(1) 蝸桿蝸輪

圖 12.6 表示軸角 $\Sigma = 90^\circ$ 的蝸桿組中，齒的受力方向。因為蝸桿蝸輪的動力傳動大部分為滑動接觸，所以齒面的摩擦係數對傳動效率 η_R 及齒輪的受力有很大的影響。

$$\eta_R = \frac{T_2}{T_1 i} = \frac{\tan \gamma F_{t2}}{F_{t1}} \quad (12.2)$$

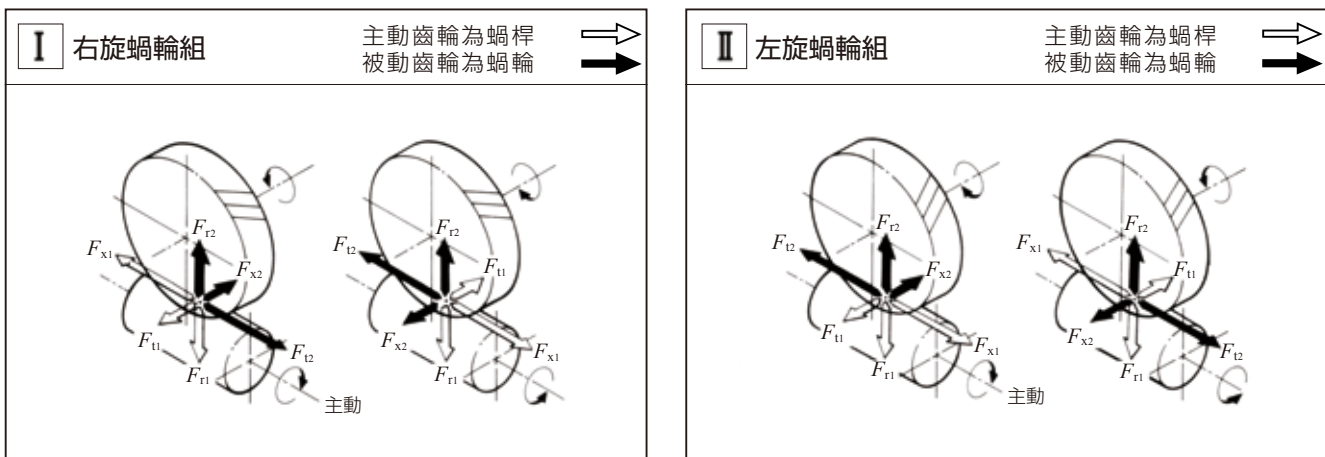


圖 12.6 蝸輪齒上的力

表 12.7 計算例 (蝸輪組)

No	規格	記號	單位	計算公式		蝸輪組	
						蝸桿	蝸輪
1	軸角	Σ	度	設定值		90°	
2	軸向 / 正面模數	$m_x \cdot m_t$	mm			2	
3	齒直角模數	α_n	度			20°	
4	齒數	z	—			1	20
5	節圓直徑 (蝸桿)	d_1	mm			31	—
6	摩擦係數	μ	—			0.05	
7	輸入力矩	T_1	N·m			1.550	—
8	節圓直徑 (蝸輪)	d_2	mm	—	$z_2 m_t$	—	40
9	導角	γ	度	$\tan^{-1} \left(\frac{m_x z_1}{d_1} \right)$		3.69139°	
10	切線方向力	$F_{t1} \cdot F_{t2}$	N	$\frac{2000 T_1}{d_1}$	$F_{t1} \frac{\cos \alpha_n \cos \gamma - \mu \sin \gamma}{\cos \alpha_n \sin \gamma + \mu \cos \gamma}$	100.0	846.5
11	軸方向力	F_x		$F_{t1} \frac{\cos \alpha_n \cos \gamma - \mu \sin \gamma}{\cos \alpha_n \sin \gamma + \mu \cos \gamma}$	F_{t1}	846.5	100.0
12	半徑方向力	F_r		$F_{t1} \frac{\sin \alpha_n}{\cos \alpha_n \sin \gamma + \mu \cos \gamma}$		309.8	
13	效率	η_R	—	$\frac{\tan \gamma F_{t2}}{F_{t1}}$		0.546	
14	輸出力矩	T_2	N·m	—	$\frac{F_{t2} d_2}{2000}$	—	16.930



(2) 交錯軸螺旋齒輪

交錯軸齒輪的齒之受力情況可以看成是類似於蝸輪組的狀況。

圖 12.7 表示軸角 $\Sigma = 90^\circ$ ，標準螺旋角為 $\beta = 45^\circ$ 度的交錯軸螺旋齒輪齒受力情況。

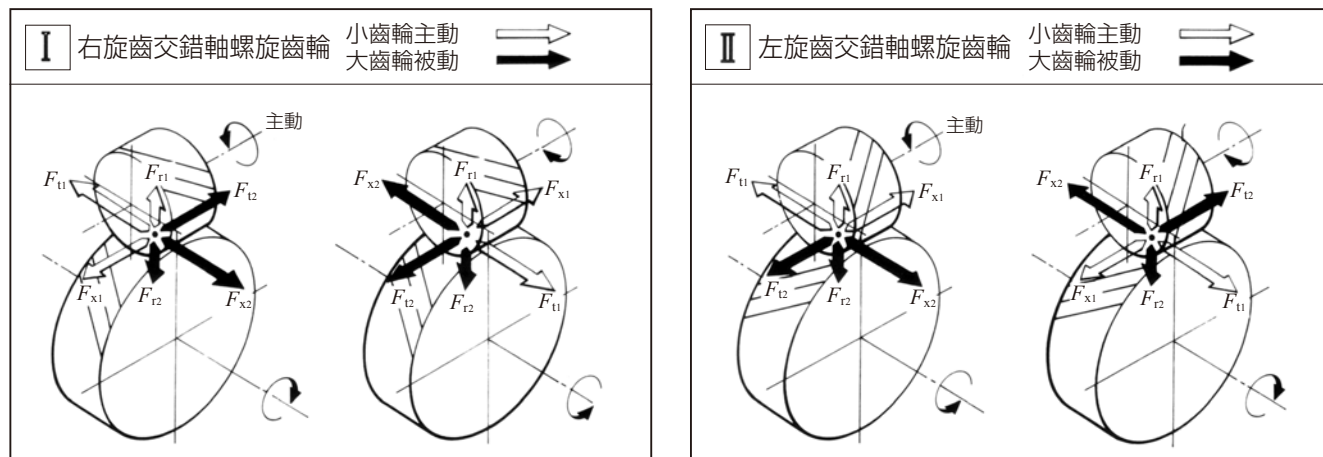


圖 12.7 交錯軸螺旋齒輪的齒之各分力方向

表 12.8 計算例 (交錯軸螺旋齒輪)

No	規格	記號	單位	計算公式	交錯軸螺旋齒輪		
					小齒輪	大齒輪	
1	軸角	Σ	度	設定值	90°		
2	齒直角模數	m_n	mm		2		
3	齒直角壓力角	α_n	度		20°		
4	齒數	z	—		13	13	
5	螺旋角	β	度		45°		
6	摩擦係數	μ	—		0.05		
7	輸入力矩	T_1	N·m		1.838	—	
8	節圓直徑	d	mm	$\frac{zm_n}{\cos \beta}$	36.770	36.770	
9	切線方向力	$F_{t1} \cdot F_{t2}$	N	$\frac{2000T_1}{d_1}$	$F_{t1} \frac{\cos \alpha_n \sin \beta - \mu \cos \beta}{\cos \alpha_n \cos \beta + \mu \sin \beta}$	100.0	89.9
10	軸方向力	F_x		$F_{t1} \frac{\cos \alpha_n \sin \beta - \mu \cos \beta}{\cos \alpha_n \cos \beta + \mu \sin \beta}$	F_{t1}	89.9	100.0
11	半徑方向力	F_r		$F_{t1} \frac{\sin \alpha_n}{\cos \alpha_n \cos \beta + \mu \sin \beta}$		48.9	
12	效率	η	—	$\frac{T_2 z_1}{T_1 z_2}$	0.899		
13	輸出力矩	T_2	N·m	—	$\frac{F_{t2} d_2}{2000}$	—	1.653